SUBRINI Depuis 1960 Année scolaire:2021-2022	Préparation aux concours d'accès à la faculté de médecine générale de médecine dentaire et de pharmacie	**MATHÉMATIQUES** Le Calcul d'intégrale **Prof : Khatim**

I. Primitives des fonctions usuelles

$\int a dx = [ax]$	$\int x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]$	$\int \frac{a}{x} dx = [a ln\|x\|]$	$\int \frac{1}{x} dx = [ln\|x\|]$	$\int x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]$	$\int \frac{1}{x^2} dx = \left[\frac{-1}{x}\right]$	$\int \frac{a}{x^2} dx = \left[\frac{-a}{x}\right]$

$\int x^n\,dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]$	$\int \frac{1}{x^n} dx = \left[\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}\right]$	$\int \sqrt{x}\,dx = \left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]$	$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = [2\sqrt{x}]$	$\int \frac{1}{\sqrt{ax+b}} dx = \frac{2\sqrt{ax+b}}{a}$

$\int \sqrt{ax+b} dx = \left[\frac{2(ax+b)\sqrt{ax+b}}{3a}\right]$	$\int (ax+b)^n dx = \left[\frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)}\right]$	$\int \frac{1}{(ax+b)^n} dx = \left[\frac{-1}{a(n-1)(ax+b)^{n-1}}\right]$

$\int \frac{1}{ax+b} dx = \left[\frac{1}{a} \times ln(\|ax+b\|)\right]$	$\int \frac{c}{ax+b} dx = \left[\frac{c}{a} \times ln(\|ax+b\|)\right]$	$\int \frac{ax+b}{cx+d} = \left[\frac{a}{c}\left(x - \frac{ad-bc}{ac} ln\left\|\frac{d}{c}+x\right\|\right)\right]$

Exponentielle

$\int e^x\,dx = [e$	$\int e^{-x}\,dx = [-e$	$\int \sqrt{e^x}\,dx = \left[\frac{\sqrt{e^x}}{2}\right]$	$\int e^{ax}\,dx = \left[\frac{1}{a}e^x\right]$	$\int e^{ax+b}\,dx = \left[\frac{1}{a}e^{ax+b}\right]$	$\int \frac{1}{e^x} dx = \left[-\frac{1}{e^x}\right]$

Exponentielle × une fonction

$\int xe^x dx = [xe^x - e^x]$	$\int e^x Cosx\,dx = \left[\frac{e^x(Sinx+Cosx)}{2}\right]$	$\int e^x Sinxdx = \left[\frac{e^x(Sinx-Cosx)}{2}\right]$

Ln(x)

$\int lnx\,dx = [xlnx - x]$	$\int xlnx\,dx = \left[\frac{x^2}{2}lnx - \frac{x^2}{4}\right]$	$\int \frac{lnx}{x} dx = \left[\frac{ln^2 x}{2}\right]$	$\int \frac{1}{xlnx} dx = [ln(\|ln\|x\|\|)]$

Fonctions trigonométriques

$\int Cosxdx = Sinx$	$\int Sinxdx = -Cosx$	$\int Sin(ax+b)dx = \left[\frac{-Cos(ax+b)}{a}\right]$	$\int Cos(ax+b)dx = \left[\frac{Sin(ax+b)}{a}\right]$

$\int tan(x)\,dx = [-ln\|Cosx\|]$	$\int Cos^2 x\,dx = \left[\frac{Sin(2x)+2x}{4}\right]$	$\int Sin^2 x\,dx = \left[\frac{2x - Sin(2x)}{4}\right]$
$\int tan^2 x\,dx = [tanx - x]$	$\int tan^3 x\,dx = \left[\frac{1}{2}tan^2 x + ln\|Cosx\|\right]$	$\int \frac{1}{Cos^2 x} dx = [tanx]$

$\int \frac{Sinx}{Cosx+Sinx} dx = \left[\frac{x - ln\|Cosx+Sinx\|}{2}\right]$	$\int \frac{Cosx}{Cosx+Sinx} dx = \left[\frac{x + ln\|Cosx+Sinx\|}{2}\right]$
$\int \frac{1}{Sinx} dx = \left[\frac{1}{2} ln\left(\left\|\frac{1-Cosx}{1+Cosx}\right\|\right)\right]$	$\int \frac{1}{Cosx} dx = \left[\frac{1}{2} ln\left(\left\|\frac{1+Sinx}{1-Sinx}\right\|\right)\right]$

Arctan ; arcsin ; arccos

$\int \frac{1}{1+x^2} dx = arctgx$	$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$	$\int \frac{1}{1-x^2} dx = ln\sqrt{\left\|\frac{1+x}{1-x}\right\|}$ $Si\ x \neq \pm 1$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = arcsinx$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = ln\left(\left\|x + \sqrt{x^2-1}\right\|\right)$	

II. Opérations sur les fonctions Primitives

U et V deux fonctions dérivables

Le Produit

$\int (u)' \times u = \left[\frac{(u)^2}{2}\right]$	$\int (u)' \times u^n = \left[\frac{(u)^{n+1}}{n+1}\right]$	$\int (u)' \times \sqrt{u} = \left[\frac{2}{3}\sqrt{(u)^3}\right]$	$\int U' \times e^u = \left[e^{u(x)}\right]$
$\int U' \times \cos(U) = [\text{Sin}(U)]$	$\int U' \times \text{Sin}(U) = [-\text{Cos}(U)]$	$\int V' \times U'(V) = [U(V)]$	$\int U'V + V'U = [U \times V]$

Le Quotient

$\int \frac{(u)'}{u} = [\ln(\lvert u(x)\rvert)]$	$\int \frac{(u)'}{(u)^2} = \left[\frac{-1}{u}\right]$	$\int \frac{(u)'}{(u)^n} = \left[\frac{-1}{(n-1)(u)^{n-1}}\right]$	$\int \frac{(u)'}{\sqrt{u}} = [2\sqrt{u}]$	$\int \frac{U'V - V'U}{(V)^2} = \left[\frac{U}{V}\right]$

III. Règles et propriétés

1) Relation de Chasles

f une fonction continue sur un segment $[a, b]$ on a

- $\int_a^a f(x)dx = 0$
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ avec $a \leq c \leq b$

2) linéarité

f et g deux fonctions Continues sur un segment $[a, b]$ on a

- $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
- $\int_a^b k.f(x)dx = k\int_b^a f(x)dx$ avec $k \in \mathbb{R}$

3) La Valeur Moyenne

f une fonction continue sur un segment $[a, b]$

- Il existe au moins un élément c de $[a, b]$ tel que : $(b-a) \times f(c) = \int_a^b f(x)dx$
- Le Nombre $\boldsymbol{f(c) = \frac{1}{b-a} \times \int_a^b f(x)dx}$ S'appelle **La Valeur Moyenne de f sur $[a, b]$**

4) Intégrales et Ordre

f et g deux fonctions Continues sur un segment $[a, b]$ on a

- Si f est Positive sur $[a, b]$ alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
- Si $\forall x \in [a, b]\ f(x) \leq g(x)$ alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$
- $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

IV. Techniques de calcul d'intégrales

1) L'intégration par parties

u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a, b]$

On a $\int_a^b (v(x))' \times (u(x))dx = [(u(x)) \times (v(x))]_a^b - \int_a^b (u(x))' \times (v(x))dx$:

2) $I = \int \frac{P(x)}{Q(x)}$ avec P et Q deux polynômes

a - Si $d°P < d°Q$ On utilise la décomposition en éléments simples

et si $d°P \geq d°Q$ On utilise La division euclidienne + la décomposition en éléments simples

Exemples : Calculer les intégrales suivantes

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{x^2 - 1} dx \ ; J = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2 + x}{(x-1)(x-2)(x-3)} dx \ ; K = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2 - 2x}{x - 3} dx$$

b - Si $P(x) = \propto \in \mathbb{R}^*$ et $Q(x) = ax^2 + bx + c$ avec a, b et c trois nombres réels avec $a \neq 0$

On Factorise $Q(x)$ en résolvant l'équation (E): $ax^2 + bx + c = 0$ dans $\mathbb{R}$

Si $S = \{x_0\}$ alors $\int \frac{\propto}{ax^2+bx+c} dx = \int \frac{\propto}{a(x-x_0)^2} dx = \frac{\propto}{a} \int \frac{1}{(x-x_0)^2} dx = \frac{\propto}{a} \left[\frac{-1}{x-x_0}\right]$

Si $S = \{x_1; x_2\}$ alors on pose $\beta = \frac{1}{x_1 - x_2}$ et $\gamma = \frac{1}{x_2 - x_1}$

$$\int \frac{\propto}{ax^2+bx+c} dx = \int \frac{\propto}{a(x-x_1)(x-x_2)} dx = \frac{\propto}{a} \int \frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)} dx = \frac{\propto}{a} \int \frac{\beta}{x-x_1} + \frac{\gamma}{x-x_2} dx = \frac{\propto}{a} [\beta \ln|x - x_1| + \gamma \ln|x - x_2|]$$

Exemples : Calculer les intégrales suivantes

$$I = \int_2^4 \frac{2}{x^2 - 2x + 1} dx \ ; J = \int_3^4 \frac{x + 3}{x^2 - 3x + 2} dx \ ; K = \int_2^3 \frac{1}{2x^2 + x - 3} dx$$

3) L'intégrale et la parité

Si f est impaire alors $\int_{-a}^a f(x)\ dx = 0$

Si f est paire alors $\int_{-a}^a f(x)\ dx = 2\int_0^a f(x)\ dx$

4) $\int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2}\ dx = \frac{\pi a^2}{2}$ et $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\ dx = \frac{\pi a^2}{4}$

5) $\int_0^\pi Cos^n(x)Cos(mx)\ dx = 0$ avec $m > n$ et $\int_0^\pi Cos^n(x)Cos(nx)\ dx = \frac{\pi}{2^n}$

6) Exponentielle× Polynome

$\int e^x P(x)\ dx = [e^x Q(x)]$

avec $d°Q = d°p$ et on détermine les coefficients de Q en utilisant : $(e^x Q(x))' = e^x P(x)$

Exemple

Calculons $I = \int_0^1 (x^3 + x^2 - x - 2)e^x\ dx$

On peut calculer l'intégrale I en utilisant l'intégration par parties mais il faudrait répéter 3 fois l'intégration par parties

La primitive de $x \mapsto (x^3 + x^2 - x - 2)e^x$ est une fonction F de la même forme

C'est-a-dire $F(x) = (ax^3 + bx^2 + cx + d)e^x$

Alors on a $F'(x) = (ax^3 + (3a + b)x^2 + (2b + c)x + c + d)e^x$

Or $F'(x) = (x^3 + x^2 - x - 2)e^x$ alors $ax^3 + (3a + b)x^2 + (2b + c)x + c + d = x^3 + x^2 - x - 2$

Par identification en trouve que $a = 1$; $b = -2$; $c = 3$ et $d = -5$

D'où $F(x) = (x^3 - 2x^2 + 3x - 5)e^x$

Alors $I = \int_0^1 (x^3 + x^2 - x - 2)e^x\ dx = [(x^3 - 2x^2 + 3x - 5)e^x]_0^1 = 5 - 3e$

7) Exponentielle × fonction trigonométrique

$a-\ \int(aSinx+bCosx)e^{x}dx=\left[\left(\frac{b+a}{2}Sinx+\frac{b-a}{2}Cosx\right)e^{x}\right]$ avec a et b deux nombres réels

Exemple

Calculer l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{4}}(Sin(x)+Cos(x))e^{x}\,dx$

b – on peut utiliser la technique 5 pour calculer des intégrales de la forme :

$$\int(aSin(\propto x)+bCos(\propto x))e^{x}\ dx$$

Exemple

Calculer l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}}Sin(2x)e^{x}\,dx$

8) Intégrales trigonométriques : puissances

n est entier naturel impair

$$\int Cos^{n}x\ dx=\int Cos(x)\times Cos^{n-1}(x)\ dx=\int Cos(x)\times(1-Sin^{2}(x))^{\frac{n-1}{2}}\ dx$$

Puis Développer et remarquer que $\int Cos(x)\times Sin^{P}(x)dx=\left[\frac{Sin^{P+1}(x)}{P+1}\right]$

$$\int Sin^{n}x\ dx=\int Sin(x)\times Sin^{n-1}(x)\ dx=\int Sin(x)\times(1-Cos^{2}(x))^{\frac{n-1}{2}}\ dx$$

Puis Développer et remarquer que $\int Sin(x)\times Cos^{P}(x)dx=\left[\frac{-Cos^{P+1}(x)}{P+1}\right]$

Exemples

Calculer les intégrales $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}Cos^{5}(x)\,dx$ et $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}Sin^{3}(x)\,dx$

n un entier naturel strictement supérieur à 2

$$\int tan^{n}(x)dx=\int tan^{2}(x)\times tan^{n-2}(x)\ dx=\int(tan'(x)-1)\times tan^{n-2}(x)\ dx$$

$$=\left[\frac{tan^{n-1}(x)}{n-1}\right]-\int tan^{n-2}(x)\ dx$$

Important :

$$\int(tan^{n}(x)+tan^{n-2}(x))dx=\left[\frac{tan^{n-1}(x)}{n-1}\right]$$

Exemples

Calculer les intégrales $\int_0^{\frac{\pi}{4}}tan^{3}(x)\,dx$ et $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}tan^{5}(x)+tan^{3}(x)\ dx$